数理解析研究所講究録
562巻 1985年 124-131

非線形フィルターの近似について

九大工 国田寛 (Hiroshi Kunita)

非線形フィルターの安定性，ロバストネスの系統的研究はあまり見られない．本報告ではこの問題を近似の立場から論じたい．なお線形フィルター理論ではこの種の問題はKalmanフィルターの理論から比較的容易に解くことが出来る．

離散時間モデルと連続時間モデルに分けて論ずることとする．

1. 離散時間モデル

System model 確率差分式

$$x(k) = F_{k-1}(x(k-1)) + G_{k-1}(x(k-1))\eta(k), \quad k=1,\cdots,N \quad \text{on } R^d$$

ただし $F_k(x)$ は d-ベクトル連続関数，$G_k(x)$ は $d\times r$-行列連続関数であり，$\underline{\eta}=(\eta(1),\cdots,\eta(N))$ は r-ベクトル確率過程で初期値 $x(0)$ は $\underline{\eta}$ と独立とする．

Measurement model

$$y(k) = h_k(x(k)) + w(k), \quad k=1,\cdots,N \quad \text{on } R^e.$$

ただし $f_k(x)$ は e-ベクトル連続関数，$\underline{w}=(w(1),\cdots,w(N))$ は e-ベクトル確率過程で $\underline{\eta}$ とは独立．

<u>Non-linear filter</u> $\hat{x}(k)$：$x(k)$ の測定値 $y(i)$；$0\leq i\leq k$ にもとづく最小二乗推定．すなわち条件付平均

$$\hat{x}(k)=E[x(k)\,|\,y(0),\cdots,y(k)].$$

確率過程 $\underline{\eta}=(\eta(1),\cdots,\eta(N))$ はシステムに作用するランダムな力を表わしており，確率過程 $\underline{w}=(w(1),\cdots,w(N))$ は測定にともなう雑音を表わしている．一般にこれらの統計的量（分布及びその平均，分散等）は必ずしも正確に知ることは出来ない．実用上はこれらを white noise（白色雑音）すなわち $\eta(1),\cdots,\eta(N)$（又は $w(1),\cdots,w(N)$）が独立かつ正規分布にしたがうとみなすことが多い．しかしこのことは $\underline{\eta}$ 及び $\underline{w}$ の分布が white noise に近いとき，フィルターの値 $\hat{x}(k)$ が $\underline{\eta}$ 及び $\underline{w}$ をちょうど白色雑音とみなしたときのフィルターの値に近いことを暗に仮定していることに他ならない．この仮定が正しいかどうかを論ずるのがこの報告の目的である．

この問題を正確に論ずるためには分布の定義が必要である．確率過程 $\underline{\eta}$ の分布は R^{rN} 上の確率測度 μ で

$$\mu(E)=P\{\omega;\ (\eta(1),\cdots,\eta(N))\in E\},\quad E \text{ は } R^{rN} \text{ のボレル集合，}$$

によって定義する．確率過程 η を強調するために μ_{η} とかく．

同様に確率過程 $\underline{x}$ 及び $\underline{w}$ の分布をそれぞれ $\mu_{\underline{x}}$ 及び $\mu_{\underline{w}}$ と表わす。また初期値 $x(0)$ の分布を μ_0 とかく。

注意. 分布 $\mu_{\underline{x}}$ は関数 $\underline{F}=(F_k)$, $\underline{G}=(G_k)$ 及び分布 $\mu_{\underline{v}}$, μ_0 によって一意に定まる. 即ち $\mu_{\underline{x}} = \mu_{\underline{x}}(\underline{F}, \underline{G}, \mu_{\underline{v}}, \mu_0)$.

フィルターの条件付分布 π_k, $k=0,\dots,N$ を次の様に定義する:

$$\pi_k(E) = P\{x(k) \in E \mid y(0), \dots, y(k)\} \quad (\text{条件付確率}).$$

注意: フィルターの条件付分布 π_k は $\mu_{\underline{x}}$, $\mu_{\underline{w}}$ 及び $\underline{h}=(h_k)$ によって一意に定まる. 即ち $\pi_k = \pi_k(\mu_{\underline{x}}, \mu_{\underline{w}}, \underline{h})$

定義 R^M 上の分布の列 μ^n, $n=1,2,\dots$, μ が, R^M 上の任意の有界連続関数 $f(x)=f(x_1,\dots,x_M)$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\,\mu^n(dx) = \int f(x)\,\mu(dx)$$

をみたすとき, $\{\mu^n, n=1,2,\dots\}$ は μ に弱収束するという.

定理1 システムの分布 $\mu_{\underline{x}} = \mu_{\underline{x}}(\underline{F}, \underline{G}, \mu_{\underline{v}}, \mu_0)$ は $\underline{F}$, $\underline{G}$, $\mu_{\underline{v}}$, μ_0 について連続である. 即ち $\underline{F}^n$ 及び $\underline{G}^n$ が $\underline{F}$ 及び $\underline{G}$ に広義一様収束し, $\mu_{\underline{v}}^n$, μ_0^n, $n=1,2,\dots$ が $\mu_{\underline{v}}$, μ_0 に弱収束すれば $\mu_{\underline{x}}(\underline{F}^n, \underline{G}^n, \mu_{\underline{v}}^n, \mu_0^n)$ は $\mu_{\underline{x}}(\underline{F}, \underline{G}, \mu_{\underline{v}}, \mu_0)$ に弱収束する.

証明は容易なので省略.

定理2 フィルターの条件付分布 $\pi_k = \pi_k(\mu_{\underline{x}}, \mu_{\underline{w}}, \underline{h})$ は次の意味で $\mu_{\underline{x}}$, $\mu_{\underline{w}}$, $\underline{h}$ について連続である:

(a) $\mu_{\underline{x}}^n$, $n=1,2,\dots$ は $\mu_{\underline{x}}$ に弱収束する.

(b) $\mu_{\underline{w}}^n$, $n=1,2,\cdots$ の密度関数列 f^n, $n=1,2\cdots$ は $\mu_{\underline{w}}$ の密度関数 f に各点収束し, かつ $\sup_{n,x}|f_n/f|<\infty$ をみたす.

(c) $\underline{h}^n$, $n=1,2,\cdots$ は $\underline{h}$ に広義一様収束する.

このとき $\pi_k(\mu_{\underline{x}}^n, \mu_{\underline{w}}^n, \underline{h}^n)$ は $\pi_k(\mu_{\underline{x}}, \mu_{\underline{w}}, \underline{h})$ に弱収束する (a.s.)

証明. フィルター π_k について次の likelihood ratio formula が成立する. (Jazwinski)

$$\pi_k(A)(y(0),\cdots,y(k)) = \frac{\iint_{x(k)\in A} f(y(0)-h(x(0)),\cdots,y(k)-h(x(k)))\,\mu_{\underline{x}}(dx(0)\cdots dx(k))}{\iint f(y(0)-h(x(0)),\cdots,y(k)-h(x(k)))\,\mu_{\underline{x}}(dx(0)\cdots dx(k))}$$

これを使えば証明は容易.

2. 連続時間モデル

<u>System model</u>　確率(常)微分方程式の解:

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) + G(t,x)\,\eta(t) \qquad \text{on } R^d.$$

ただし $F(t,x)$ は d-ベクトル連続関数, $G(t,x)$ は $d\times r$-行列連続関数で x については なめらか. $\eta(t)$ は r-次元 colored noise 又は white noise. ただし white noise のときは次の Stratonovich の確率微分方程式と解釈する.

$$dx(t) = F(t,x(t))\,dt + G(t,x(t))\circ d\eta(t)$$

ただし $\eta(t)$ は r-ベクトル Wiener過程

<u>measurement model</u>

$$y(t) = h(t, x(t)) + w(t)$$

ただし $h(t, x)$ は e-ベクトル連続関数，$w(t)$ は $\eta(t)$ と独立な e-次元 colored noise 又は white noise

<u>Non-linear filter</u>: $\hat{x}(t) = E[x(t) | y(s) ; 0 \leq s \leq t]$，条件付分布は

$$\pi_t(A) = P(x(t) \in A | y(s) ; 0 \leq s \leq t)$$

さて確率過程 $\underline{\eta} = (\eta(t) ; 0 \leq t \leq T)$，$\underline{x} = (x(t) ; 0 \leq t \leq T)$，$\underline{w} = (w(t) ; 0 \leq t \leq T)$ の分布は連続関数の空間に定義する

$$W^d = C([0,T] ; R^d) = \{[0,T] \text{ から } R^d \text{ への連続写像の全体}\}$$

とおき，W^d の元を w であらわす．w の $t \in [0,T]$ での値を $w(t)$ とかく．W^d は sup norm

$$\|w\| = \sup_t |w(t)|$$

により Banach 空間である．W^d の位相的ボレル集合体を $\mathcal{B}(W^d)$ で表わす．確率過程 $\underline{\eta}$ の分布は $(W^r, \mathcal{B}(W^r))$ 上の確率測度で次のように定義する．

$$\mu_{\eta}(A) = P\{\omega ; \eta.(\omega) \in A\}$$

確率過程 $\underline{x}$ および $\underline{w}$ の分布を μ_w，μ_x とかく．μ_x は $(\underline{F}, \underline{G}, \mu_x, \mu_0)$ により一意に定まる．即ち $\mu_x = \mu_x(F, G, \mu_x, \mu_0)$

分布 μ_x は $(\underline{F}, \underline{G}, \mu_x, \mu_0)$ により一意に定まる．即ち $\mu_x = \mu_x(\underline{F}, \underline{G}, \mu_x, \mu_0)$

$(W^d, \mathcal{B}(W^d))$ 上の確率測度の列 $\mu^n, n=1,2,\cdots$, μ の弱収束も、有限次元の場合と同様に定義する。即ち W^d 上の任意の有界連続関数 $f(w)$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\int f(w)\mu^n(dw) = \int f(w)\mu(dw)$$

をみたすとき、μ^n は μ に弱収束するという。

分布 $\mu_{\underline{x}}$ の $\Xi, \underline{\xi}, \mu_{\underline{\eta}}, \mu_0$ に関する連続性は離散時間モデルの様に簡単ではない。$\underline{\eta}$ の分布を固定して、$\Xi^n, \underline{\xi}^n$ が $\Xi, \underline{\xi}$ に広義一様収束する場合とか、μ_0^n が μ_0 に弱収束する場合に、対応する $\underline{x}$ の分布 $\mu_{\underline{x}}^n, n=1,2,\cdots$ が $\mu_{\underline{x}}$ に弱収束することは容易に確かめられる。しかし $\underline{\eta}$ の分布列 $\mu_{\underline{\eta}}^n, n=1,2,\cdots$ が $\mu_{\underline{\eta}}$ に弱収束しても対応して $\mu_{\underline{x}}^n, n=1,2,\cdots$ が $\mu_{\underline{x}}$ に弱収束するとは必ずしも言えない。更に強く混合性の仮定が必要になる。

<u>$\mu_{\underline{x}}$ の混合性</u>. $\mathcal{F}_{s,t} = \sigma(\dot{\eta}(u);\ s\le u\le t)$ とおき、mixing rate を

$$\beta(t) = \sup_s \sup_{A\in\mathcal{F}_{0,s},\ B\in\mathcal{F}_{s+t,T}} |\mu_{\underline{\eta}}(A\cap B) - \mu_{\underline{\eta}}(A)\mu_{\underline{\eta}}(B)|$$

によって定義する。

定理3. System model を定義する colored noise の分布の列 $\mu_{\underline{\eta}}^n, n=1,2,\cdots$ が white noise (= Wiener 過程) の分布 $\mu_{\underline{\eta}}$ に弱収束するとする。$\mu_{\underline{\eta}}^n$ の mixing rate の列 $\beta^n(t)$ が

$$\sup_{n,t} \left(\int_0^T \beta_n(\tau)^{\frac{1}{\delta+2\alpha}} d\tau\right)\left(\int |y(t)|^8 \mu_{\underline{x}}^n(dx)\right)^{\frac{1}{4}} < \infty$$

をみたすならば，確率常微分方程式できまるシステム $x(t)$ の分布列 $\mu_{\underline{x}}^n$, $n=1,2,\cdots$ は white noise にもとづく Stratonovich 方程式の解の分布 $\mu_{\underline{x}}$ に弱収束する．

証明は Kunita [5] を参照されたい．

つぎにフィルター π_t は $(\mu_{\underline{x}}, \mu_{\underline{w}}, h)$ の関数である．$\mu_{\underline{x}}$, $\mu_{\underline{w}}$ を固定すれば，関数列 h^n が h に広義一様収束するとき，対応するフィルター列 π_t^n, $n=1,2,\cdots$ は π_t に弱収束することは容易にわかる．$\mu_{\underline{x}}$ に関する連続性は次の定理からわかる．

<u>定理4.</u> measurement の noise は white noise とする．システムモデルの分布列 $\mu_{\underline{x}}^n$, $n=1,2,\cdots$ が $\mu_{\underline{x}}$ に弱収束すれば，$\mu_{\underline{x}}^n$ に対応するフィルター π_t^n は $\mu_{\underline{x}}$ に対応するフィルター π_t に弱収束する (a.s.)

証明には Kallianpur-Striebel の公式を用いる．([2] 又は [3])

$$\pi_t(A) = \frac{\int_{x(t)\in A} \exp\left\{\int_0^t h(s,x(s))\,y(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t |h(s,x(s))|^2 ds\right\} \mu_{\underline{x}}(dx)}{\int \exp\left\{\int_0^t h(s,x(s))\,y(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t |h(s,x(s))|^2 ds\right\} \mu_{\underline{x}}(dx)}$$

<u>注意</u>: π_t の $\mu_{\underline{w}}$ に関する連続性は未解決である

文　献

1. A. H. Jazwinski, Stochastic processes and filtering theory, Academic Press, 1970.

2. G. Kallianpur, Stochastic filtering theory, Springer-Verlag, 1980.

3. 国田 寛、確率過程の推定、産業図書、1976.

4. H. Kunita, On the convergence of solutions of stochastic ordinary differential equations as stochastic flows of diffeomorphisms, Osaka J. Math. 21 (1984), 883-911.

5. H. Kunita, Convergence of stochastic flows connected with stochastic ordinary differential equations, Stochastics, 投稿中.

6. H. J. Kushner and H. Huang, Approximating multiple Ito integrals with "Band Limited" process, Stochastics 14 (1985), 115-148.